ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

\- -

LÊ VĂN HIỂU

HÀM ĐƠN ĐIỆU, TỰA ĐƠN ĐIỆU VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHÉP ĐƠN ĐIỆU HÓA HÀM SỐ

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

- -

LÊ VĂN HIỂU

HÀM ĐƠN ĐIỆU, TỰA ĐƠN ĐIỆU VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHÉP ĐƠN ĐIỆU HÓA HÀM SỐ

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Thái Nguyên - 2017

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU ii

Chương 1. Một số lớp hàm số đơn điệu 1

1.1 Hàm đơn điệu . . . 1
1.2 Hàm đơn điệu tuyệt đối . . . 5
1.3 Hàm đơn điệu có tính tuần hoàn . . . 6
1.4 Hàm đơn điệu liên tiếp trên một đoạn . . . 7

Chương 2. Phép đơn điệu hóa hàm số 14

2.1 Hàm đơn điệu từng khúc và phép đơn điệu hóa hàm số . . . 14
2.2 Hàm tựa đơn điệu . . . 25
2.3 Phương pháp xây dựng các hàm tựa đơn điệu từ một hàm số cho trước . 27
2.3.1 Bất đẳng thức hàm liên quan đến tam giác . . . 27
2.3.2 Hàm tựa đồng biến dạng hàm số sin . . . 28
2.3.3 Hàm tựa lõm dạng hàm số cosin . . . 30

Chương 3. Các dạng toán liên quan 33

3.1 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số trong chứng minh bất đẳng thức . . . 33
3.1.1 Một số bài toán áp dụng trong bất đẳng thức đại số . . . 33
3.1.2 Một số bài toán áp dụng cho bất đẳng thức trong tam giác . . . 35
3.2 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số trong bài toán cực trị . . . 38

KẾT LUẬN 47

TÀI LIỆU THAM KHẢO 48

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lớp các hàm số đơn điệu và lồi, lõm có vị trí rất quan trọng trong Giải tích Toán học vì nó không những là một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của nhiều mô hình toán học mà còn là một công cụ đắc lực để khảo sát bất đẳng thức và các bài toán cực trị.

Trong hầu hết các kì thi học sinh giỏi toán quốc gia và Olympic toán quốc tế thì các bài toán về hàm số thường được đề cập đến và được xem như những dạng toán rất khó của bậc phổ thông.

Do đó, đề tài *"Hàm đơn điệu, tựa đơn điệu và một số ứng dụng của phép đơn điệu hóa hàm số"* được nghiên cứu nhằm thể hiện rõ vai trò quan trọng của hàm đơn điệu, tựa đơn điệu trong các dạng toán thi HSG quốc gia và Olympic quốc tế.

2. Lịch sử nghiên cứu

Hiện nay các tài liệu tham khảo về chuyên đề hàm số có nhiều nhưng chưa đề cập đầy đủ và hệ thống đến lớp các hàm đơn điệu, tựa đơn điệu cùng các ứng dụng của chúng.

Vì vậy, việc khảo sát sâu hơn về lớp các hàm đơn điệu, tựa đơn điệu và các dạng toán ứng dụng liên quan cho ta hiểu sâu sắc hơn về lý thuyết cũng như các ứng dụng liên quan đến hàm số.

3. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận văn *"Hàm đơn điệu, tựa đơn điệu và một số ứng dụng của phép đơn điệu hóa hàm số"* trình bày một số vấn đề liên quan đến lớp các hàm đơn điệu, tựa đơn điệu và một số ứng dụng liên quan.

Mục đích nghiên cứu của luận văn nhằm thể hiện rõ vai trò quan trọng của hàm đơn điệu trong các dạng toán thi HSG quốc gia và Olympic quốc tế.

4. Các luận điểm và đóng góp của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận và 3 chương.

Chương 1. Một số lớp hàm số đơn điệu

Chương 2. Phép đơn điệu hóa hàm số

Chương 3. Các dạng toán liên quan

Trong các chương đều trình bày một hệ thống bài tập áp dụng giải các đề thi HSG quốc gia và Olympic quốc tế liên quan, góp phần giúp cho học sinh và giáo viên có thêm một số phương pháp giải toán bất đẳng thức.

5. Phương pháp nghiên cứu

Luận văn này được sử dụng một số phương pháp nghiên cứu sau đây:

Nghiên cứu từ các nguồn tư liệu gồm: các tài liệu tham khảo được nêu ở phần cuối của luận văn, sách giáo khoa phổ thông, các tài liệu dành cho giáo viên, tạp chí toán học tuổi trẻ, các đề tài nghiên cứu có liên quan, ...

Nghiên cứu thông qua việc tiếp cận lịch sử, sưu tập, phân tích, tổng hợp tư liệu và tiếp cận hệ thống.

Nghiên cứu từ thực nghiệm sư phạm ở trường phổ thông.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của NGND.GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, nguyên Hiệu trưởng trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, người thày đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình hoàn thành bản luận văn này. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và kính trọng sâu sắc đối với Giáo sư.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Chương 1. Một số lớp hàm số đơn điệu

Trong chương này sử dụng các tài liệu tham khảo [2], [6] để nhắc lại các kiến thức cơ bản của một số lớp hàm số đơn điệu để sử dụng trong chứng minh bất đẳng thức và bài toán cực trị liên quan.

1.1 Hàm đơn điệu

Ta thường dùng ký hiệu $I(a,b) \subset \mathbb{R}$ là nhằm ngầm định một trong bốn tập hợp (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ hoặc $[a,b]$, với $a<b$.

Xét hàm số $f(x)$ xác định trên tập $I(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1 (xem [2])**.** Nếu với mọi $x_1,\ x_2 \in I(a,b)$ sao cho $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) \leq f(x_2)$ thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng trên $I(a,b)$.

Đặc biệt, khi ứng với mọi cặp $x_1,\ x_2 \in I(a,b)$, ta đều có

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2,$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng thực sự trên $I(a,b)$.

Ngược lại, nếu với mọi $x_1,\ x_2 \in I(a,b)$ sao cho $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) \geq f(x_2)$ thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $I(a,b)$. Nếu xảy ra

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2;\ \forall x_1,\ x_2 \in I(a,b),$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm thực sự trên $I(a,b)$.

Những hàm số đơn điệu tăng thực sự trên $I(a,b)$ được gọi là hàm đồng biến trên $I(a,b)$ và hàm số đơn điệu giảm thực sự trên $I(a,b)$ được gọi là hàm nghịch biến trên tập đó.

Trong chương trình giải tích, chúng ta đã biết đến các tiêu chuẩn để nhận biết khi nào thì một hàm số khả vi cho trước trên khoảng (a,b) là một hàm đơn điệu trên khoảng đó.

Các định lí sau đây cho ta một số đặc trưng đơn giản khác của hàm đơn điệu.

Định lý 1.1 (xem [2-6])**.** *Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ là một hàm đơn điệu tăng khi và chỉ khi với mọi cặp bộ số dương $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ và $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$, ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big). \tag{1.1}$$

Chứng minh. Khi $f(x)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ thì hiển nhiên ta có

$$f(x_j) \leq f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big),\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

Suy ra

$$a_j f(x_j) \leq a_j f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big),\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n. \tag{1.2}$$

Lấy tổng theo j $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$, từ (1.2), ta thu được (1.1).

Ngược lại, với n = 2, từ (1.1), ta có

$$f(x) + \varepsilon f(h) \leq (1+\varepsilon) f(x+h),\ \forall \varepsilon,\ h > 0. \tag{1.3}$$

Khi $\varepsilon \to 0$, ta thu được $f(x+h) \geq f(x)$, hay $f(x)$ là một hàm đồng biến.

Định lý 1.2 (xem [2-6])**.** *Để bất đẳng thức*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big), \tag{1.4}$$

được thỏa mãn với mọi bộ số dương $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, điều kiện đủ là hàm $g(x) := \dfrac{f(x)}{x}$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Chứng minh. Nhận xét rằng, ta có hàm số $f(x) = xg(x)$ và (1.4) sẽ có dạng (1.1) với $a_j = x_j$ $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k g(x_k) \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) g\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big), \tag{1.5}$$

hiển nhiên được thỏa mãn ứng với $g(x)$ là một hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Hệ quả 1.1. *Giả sử $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ là hàm đơn điệu tăng trong $[0, +\infty]$. Khi đó, với mọi dãy số dương và giảm $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, ta đều có*

$$f(x_1 - x_n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \Big(f(x_k) - f(x_{k+1})\Big).$$

Nhận xét rằng (1.5) không là điều kiện cần để $g(x)$ là một hàm đồng biến. Thật vậy, chỉ cần chọn hàm $g(x)$ có tính chất

$$0 < g(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+),\ \forall x \in \mathbb{R}^+ \ \text{ và } \ \max g(x) \leq 2 \min g(x),$$

ta dễ dàng kiểm chứng rằng (1.5) được thỏa mãn. Chẳng hạn, ta thấy hàm số

$$g(x) = 3 + \sin x,\ x \in \mathbb{R}^+,$$

thỏa mãn điều kiện nêu trên và vì vậy nó thỏa mãn điều kiện (1.5). Tuy nhiên, hàm $g(x)$ không là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Nếu bổ sung thêm điều kiện $g(x) := \dfrac{f(x)}{x}$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ và $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$ là bộ số gồm các số lớn hơn 1, thì ta thu được bất đẳng thức thực sự

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) < f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big).$$

Tương tự, ta cũng phát biểu các đặc trưng với hàm đơn điệu giảm.

Định lý 1.3 (xem [2-6]). *Hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ là một hàm số đơn điệu giảm khi và chỉ khi với mọi cặp bộ số dương $a_1,\ a_2, \dots,\ a_n$ và $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$, ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \geq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big).$$

Định lý 1.4 (xem [2-6]). *Để bất đẳng thức*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big),$$

được thỏa mãn với mọi bộ số dương $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$, điều kiện đủ là hàm $g(x) := \dfrac{f(x)}{x}$ đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}^+$.

Nhận xét rằng, trong số các hàm số sơ cấp một biến, thì hàm tuyến tính $f(x) = ax$ đóng vai trò đặc biệt quan trọng, vì nó rất dễ nhận biết về tính đồng biến (khi $a > 0$) và nghịch biến (khi $a < 0$) trong mỗi khoảng tùy ý cho trước. Đặc trưng sau đây sẽ cho ta thấy rõ hơn về đặc trưng (bất đẳng thức hàm) của hàm tuyến tính.

Định lý 1.5 (xem [2-6]). *Giả thiết rằng, với mọi cặp bộ số dương $a_1,\ a_2, \dots,\ a_n;\ x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$, ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \geq f\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big), \tag{1.6}$$

thì $f(x) = ax$, trong đó a là hằng số.

Chứng minh. Lấy $n = 2$ và chọn $x_1 = x,\ x_2 = y;\ a_1 = \dfrac{y}{2x},\ a_2 = \dfrac{1}{2}$, từ (1.6), ta thu được

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(y)}{y};\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}^+.$$

Suy ra $g(x) := \dfrac{f(x)}{x}$ là một hàm hằng trên $\mathbb{R}^+$.

Tiếp theo, ta nêu một số tính chất của hàm đơn điệu để ước lượng một số tổng và tích phân.

Định lý 1.6 (Maclaurin, Cauchy)**.** *Giả thiết rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $(0, +\infty)$. Khi đó, ta luôn có*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k). \tag{1.7}$$

Khi $f(x)$ là hàm nghịch biến thì có dấu bất đẳng thức thực sự.

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết, $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm, nên ta luôn có

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k), \quad k = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

Lấy tổng theo k, ta thu được (1.7), chính là điều phải chứng minh.

Định lý 1.7 (xem [2-6])**.** *Giả thiết rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $(0, +\infty)$ và $\{a_k\}$ là một dãy tăng trong $(0, +\infty)$. Khi đó, ta luôn có*

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) f(a_k) \leq \int_{a_0}^{a_n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) f(a_{k-1}). \tag{1.8}$$

Khi $f(x)$ là hàm nghịch biến thì có dấu bất đẳng thức thực sự.

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết, $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm, nên ta luôn có

$$(a_k - a_{k-1}) f(a_k) \leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx \leq (a_k - a_{k-1}) f(a_{k-1}).$$

Lấy tổng theo k, ta thu được (1.8), chính là điều phải chứng minh.

Định lý 1.8 (Bất đẳng thức thứ tự Chebyshev)**.** *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm đơn điệu tăng và (x_k) là một dãy đơn điệu tăng*

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n.$$

Khi đó với mọi bộ trong (p_j)

$$p_j \geq 0,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n;\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1,$$

ta đều có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k g(x_k)\Big) \le \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) g(x_k)\Big).$$

Chứng minh. Theo giả thiết thì

$$0 \le \Big[f(x_k) - f(x_j)\Big]\Big[g(x_k) - g(x_j)\Big],$$

hay

$$f(x_k)g(x_j) + f(x_j)g(x_k) \le f(x_j)g(x_j) + f(x_k)g(x_k). \tag{1.9}$$

Để ý rằng

$$\sum_{j,k=1}^{n} p_j p_k [f(x_k)g(x_j) + f(x_j)g(x_k)] = 2\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k g(x_k)\Big),$$

và

$$\sum_{j,k=1}^{n} p_j p_k [f(x_j)g(x_j) + f(x_k)g(x_k)] = 2\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) g(x_k).$$

Kết hợp các đẳng thức này với (1.9), ta thu được

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k g(x_k)\Big) \le \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) g(x_k)\Big).$$

1.2 Hàm đơn điệu tuyệt đối

Định nghĩa 1.2 (xem [2])**.** Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm đơn điệu tuyệt đối trong khoảng (a, b) nếu đạo hàm mọi cấp của nó đều không đổi dấu

$$f^{(k)}(x) \ge 0;\ \forall x \in (a, b),\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Cũng vậy, ta có định nghĩa hàm đồng biến và nghịch biến tuyệt đối.

Định nghĩa 1.3 (xem [2])**.** Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm đồng biến (nghịch biến) tuyệt đối trong khoảng (a, b) nếu các đạo hàm mọi cấp của nó đều là hàm đồng biến (nghịch biến) tuyệt đối trong khoảng đó.

Ví dụ về các hàm số sơ cấp đơn điệu, đồng biến (nghịch biến) tuyệt đối trong khoảng $(a, b),\ (a > 0)$ là các hàm số sau.